Gausovi celi
Vrsta: Seminarski | Broj strana: 8 | Nivo: Matematički fakultet u Beogradu

Sadržaj

UVOD
Jedinstvenost faktorizacije prostim brojevima je jedna od najvašnijih tema algebre.Jedinstvenost faktorizacije prostim brojevima je toliko važna da su je mnogobrojni teoretičari nazvali osnovnom teoremom aritmetike. Jedinstvenost faktorizacije prostim brojevima je svojstvo koje nam govori da se bilo koji cijeli broj može se izraziti kao proizvod stepena prostih brojeva. Štaviše postoji samo jedan mogući takav izraz za svaki cijeli broj. Ideja o jedinstvenoj faktorizaciji prostim brojevima je veoma važna da je brojni teoretičari studiraju u drugim sistemima osim cijelih brojeva. Neki brojevni sistemi nemaju jedinstvenu faktorizaciju stepenima prostih brojeva. Razmotrimo prsten Z []. U ovom prstenu, broj 21 može se faktorisati 7 * 3 što su oba prosti brojevi u Z [], ali može se uzeti u obzir i faktorizacija (4+) (4+), koje su takođe oba prosti u Z []. Budući da možemo faktorisati 21 prostm brojevima na više od jednog načina, ne postoji jedinstvena faktorizacija prostim brojevima u Z [].
Sada razmatramo prsten Z [i]. Elementi ovog prstena su poznati kao Gausovi cijeli brojevi. U ostatku ovoga rada, mi ćemo dokazati da Gausovi cijeli imaju jedinstvenu faktorizaciju prostim brojevima.
2 Lema 1
Definicija. Za = a + bi Z[i], norma je proizvod
N( ) = (a + bi)(a - bi) = a2 + b2
Podsjetimo se Euklidovog algoritma za dijeljenje cijelih brojeva: ako imamo pozitivne cijele brojeve a i b tada za njih postoje pozitivni cijeli brojevi r i q takve da je a = bq+r za 0r
Lema1.(Algoritam za dijeljenje Gausovih cijelih): Ako su , Z0, tada postoje Z takvi da je = + , N( ) < N().
Dokaz. Ako odaberemo da bude bilo koji od Gausovih cijelih i ako tada stavimo tada je = – . Stoga je =. Primjetimo da s obzirom da Gausovi cijeli nisu zatvoreni za dijeljenje koristimo kompleksne brojeve. i su kompleksni brojevi jer je 0. Sada odaberimo da bude Gausov cijeli broj čiji realna i imaginarna komponenta su najbliži cijeli brojevi realnoj i imaginarnoj komponenti od respektivno. S obzirom da apsolutne vrijednost realne i imaginarne komponente od moraju da budu manje ili jednake . Stoga je | | ()2 + ()2= . Možemo da napišemo | | =. Primjetimo da za je . Stoga je , N( ) i .
Primjer. Neka je =27 - 23i i =8 + i. Norma od je 65. Hoćemo da napišemo = + gdje je Ideja je da se razmotri odnos i racionališe imenilac:
Kako je 193/65=2.969.. i -211/65=-3.246..., zamjenjujemo svaki razlomak sa njegovim najvećim cijelim brojem i pokušavamo = 2 - 4i. Međutim - ,
I koristeći je loša ideja jer je veće od =65.
Da bismo popravili pristup, moramo da razmišljamo pažljivije o tome kako ćemo zamijeniti 193/65=2.969.. i -211/65=-3.246 sa najbližim cijelim brojevima. Primjetimo da su 193/65 I -211/65 oba bliža cijelim brojevima sa sa njihove desne strane. To znači da je 193/165 bliži 3 nego 2, a -211/65 je bliži -3 nego -4. Koristimo sad ovaj najbliži cio broj da zamijenimo =3 - 3i. Tada je - , i ima normu manju od 65. Stoga je =3 - 3i naše rješenje.